Les 5 parties du problème ne sont pas indépendantes mais il est toujours possible d'admettre les résultats d'une question pour résoudre les suivantes.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes formels à une indéterminée à coefficients réels que l'on confondra avec les fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré strictement inférieur à n.

On étudie dans le problème les couples (F_n, G_n) vérifiant :

(E_n) : $\quad (1-X)^n F_n + X^n G_n = 1$ et $(F_n, G_n) \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^2$

I — ÉTUDE DES COUPLES (F_n, G_n)

1 - *a)* Du calcul de $((1-X)+X)^{2n-1}$, déduire l'existence d'un couple (F_n, G_n) solution de (E_n). On ne demande pas ici de calculer les coefficients de ces polynômes.

b) Expliciter F_1, F_2, F_3 et déterminer leurs zéros réels.

2 - *a)* Déterminer en fonction de F_n et G_n tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$(1-X)^n A + X^n B = 1$$

b) Montrer l'unicité du couple (F_n, G_n) solution de (E_n).

3 - *a)* Calculer $F_n(0)$.

b) Calculer $F_n(1)$.

c) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $G_n(x) = F_n(1-x)$.

d) Calculer $F_n(1/2)$.

II — ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE VÉRIFIÉE PAR F_n, $n \geqslant 2$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$.

1 - Déduire de (E_n) que F_n est solution de l'équation différentielle :

$$n y - (1-x) y' = n C_{2n-1}^{n} x^{n-1}.$$

2 - Déterminer les coefficients du polynôme F_n. On vérifiera qu'ils sont tous strictement positifs.

3 - Déduire du 2 que :

a) $C_{2n-2}^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^{k} (-1)^{n-1-k}$

b) $C_{2n-1}^{n} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{k+n-1}^{k}$

page 286. 2/3 - 1992.
E.S.M. St CYR Concours Sciences Math 2

III — NOMBRE DE ZÉROS RÉELS DE F_n

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$.

On pose $A_n(x) = (1-x)^n F_n(x)$ pour tout réel x.

1 - Montrer que A_n est une fonction polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

2 - Montrer que 0 et 1 sont zéros de A'_n polynôme dérivé de A_n. A quel ordre ?

3 - En déduire, pour tout réel x, que :

$$A_n(x) = 1 - n\, C_{2n-1}^n \int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}\, dt.$$

Quelle est la valeur de $\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n-1}\, dt$?

4 - Étudier le signe de $A_n(x)$ suivant les valeurs de x et de n.

En déduire le signe de $F_n(x)$.

Montrer que F_{2p}, $p \geqslant 1$, a un unique zéro réel strictement négatif que l'on notera x_p dans la suite.

IV — ÉTUDE DE LA SUITE $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$

1 - *a)* Montrer que :

$$\forall p \geqslant 1, \qquad (x_p)^{2p} F_{2p}(1-x_p) = 1$$

En déduire que :

$$|x_p| \leqslant \left[C_{4p-1}^{2p-1}\right]^{-\frac{1}{2p}}$$

b) Montrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \qquad 2^n < C_{2n-1}^{n-1}$$

c) Déduire des questions précédentes un encadrement de x_p indépendant de p.

2 - Relation entre F_n et F_{n-2} pour $n \geqslant 3$.

a) En utilisant I - 2, montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour $n \geqslant 2$:

$$(1-X) F_n = F_{n-1} + (aX + b) X^{n-1}.$$

Déterminer a et b.

b) En déduire que pour $n \geqslant 3$:

$$(1-X)^2 F_n = F_{n-2} + X^{n-2}(1-2X) C_{2n-3}^{n-1}\left[\frac{n-1}{4n-6} + X - X^2\right]$$

3 - Soit $Q_p = X - X^2 + \dfrac{2p-1}{8p-6}$, $p \geqslant 1$.

a) Montrer que Q_p a un unique zéro réel négatif, y_p, que l'on déterminera en fonction de p.

b) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (y_p).

4 - *a)* Vérifier que $F_2(y_1) > 0$.

b) Montrer par récurrence sur p que $\forall p \geqslant 1$, $F_{2p}(y_p) > 0$.

T.S.V.P.

c) En déduire pour $p \geqslant 1$ le signe de $y_p - x_p$ puis pour $p \geqslant 2$ celui de $F_{2p-2}(x_p)$.

d) Montrer que la suite (x_p) est monotone et a une limite finie L (que l'on déterminera plus loin) vérifiant : $L \leqslant \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

V — DÉTERMINATION DE LA VALEUR EXACTE DE L

1 - *a)* Soit $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers une limite réelle v. Montrer que la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_p = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} v_k$ converge aussi vers v.

b) Soit la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = \ln 6 \\ \text{pour } k \geqslant 1,\ v_k = \ln\left[(2+2k)\, C_{4k+3}^{2k+2}\right] - \ln\left[2k\, C_{4k-1}^{2k}\right]. \end{cases}$$

Déterminer la limite de la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$. En déduire la limite lorsque p tend vers $+\infty$ de $\left[2p\, C_{4p-1}^{2p}\right]^{\frac{1}{2p-1}}$.

2 - Pour n entier naturel non nul et α réel strictement positif, on pose :

$$I_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} u^n (1+u)^n \, du.$$

a) Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \alpha$. Montrer que :

$$\varepsilon (\alpha - \varepsilon)^n (1 + \alpha - \varepsilon)^n \leqslant I_n(\alpha) \leqslant \alpha^{n+1} (1+\alpha)^n.$$

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[I_n(\alpha)\right]^{\frac{1}{n}} = \alpha(1+\alpha)$.

3 - Soit x_p le zéro réel de F_{2p}.

a) Calculer $I_{2p-1}(-x_p)$.

b) Montrer que $I_{2p-1}(-L) \leqslant \left[2p\, C_{4p-1}^{2p}\right]^{-1}$ [on rappelle que $L = \lim\limits_{p \to +\infty} (x_p)$].

c) En déduire à l'aide des questions précédentes que :

$$L^2 - L - \frac{1}{4} \leqslant 0.$$

d) Déterminer la valeur exacte de L.